ARMA 誤差を伴う回帰モデルの小標本特性

——最尤推定量のバイアス評価——

杉　原　左右一

1．はじめに

筆者は、これまで系列相関誤差を伴う回帰モデルの最も基本的なものとして、主に誤差項が AR（1）過程に従う回帰モデルをとりあげてその未知母数推定量に関する小標本特性について若干の考察を行った[1]。

ところで、誤差項が AR（1）過程に従うとする仮定は、系列相関誤差を表現する基本的なものとして経済時系列の実証分析にも多用されるのであるが，周知の様に、AR（1）過程をはじめとする低次の AR 過程で定常時系列の振舞を表現することには自ずと限界があり、これに代わってこれを拡張した母数節約的な表現としての ARMA 過程を用いることが示唆されるのである。そこで本稿では、これまでのモデルを誤差項が ARMA 過程に従う回帰モデルに拡張し、未知母数推定量の小標本特性について考察することにしたい。より具体的には、その様なモデルとして誤差項が ARMA (1,1) 過程に従う回帰モデルをとりあげて、未知母数の最尤推定量の $O(\frac{1}{T})$ までのバイアスを求め、その諸性質について考察することにする。

以下、まず第 2 節で ARMA (1,1) 誤差を伴う回帰モデルについて述べ、第 3 節並びに 4 節で、未知母数の最尤推定量の $O_p(\frac{1}{\sqrt{T}})$ までの確率展開と、最尤推定量のバイアスの $O(\frac{1}{T})$ までの展開式を導出する。以上の議論をもとに、第 5 節でバイアスの諸性質について考察し、最後に第 6 節で、本稿で用いたバ

1) 拙稿〔5〕、〔6〕を参照されたい。特に〔5〕においては誤差項が MA (1) 過程に従う場合についても扱っている。

イアスの評価式の導出方法の概略について述べる。

なお、途中の計算過程は極めて煩雑であり、本稿では得られた主要な結果を中心に議論を進めることにしたい。

2．ARMA 誤差を伴う回帰モデル

次式で表わされる ARMA (1,1) 誤差を伴う回帰モデルを考えよう。

$$(1)\qquad y_t = \alpha x_t + v_t$$

$$v_t - \phi v_{t-1} = u_t - \theta u_{t-1}$$

ここで、y_t, x_t はそれぞれ回帰モデルの従属変数、独立変数を示し、v_t は ARMA (1,1) 過程に従う誤差項である。本稿では $\{u_t\}$ は互いに独立に同一分布 N (0, σ^2) 分布に従うものと仮定し、$|\phi|<1$, $|\theta|<1$, $\phi \neq \theta$ とする。ここで、$|\phi|<1$, $|\theta|<1$ は ARMA (1,1) 過程の定常性並びに可逆性の条件を示し、$\phi \neq \theta$ は識別可能性の条件を示すものである。上記モデルの未知母数は、$\alpha, \phi, \theta, \sigma^2$ であり、これらをベクトル $\mu = (\alpha, \phi, \theta, \sigma^2)'$ で表わそう。

また、本稿では、以下 x_t は確定変数、ないし v_t とは独立な確率変数とし、

$$\gamma(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-\tau} x_t x_{t+\tau}$$

が存在して、$O(\frac{1}{\sqrt{T}})$ ないしそれ以下のオーダーの δ について、

$$(2)\qquad \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-\tau} x_t x_{t+\tau} = \gamma(\tau) + \delta$$

となるものとしよう。例えば、x_t が AR(1) 過程に従う場合には、$\delta = O(\frac{1}{\sqrt{T}})$ となる。なお、x のスペクトル分布関数を $F_x(\lambda)$ とすれば、$\gamma(\tau)$ を、

$$\gamma(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau}\, dF_x(\lambda)$$

と表わすことができる。

さて、観測データ $y = (y_1, y_2, \cdots, y_T)'$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_T)'$ が得られたとき、μ の対数尤度関数は、

$$(3)\qquad L(\mu) = -\frac{T}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2\sigma^2}(y - \alpha x)'\Sigma^{-1}(y - \alpha x)$$

となる。ここで、Σ は

$$\Sigma = \frac{1}{\sigma^2} \mathrm{E}\,(y - \alpha x)'(y - \alpha x)$$

を示し、対応するスペクトル密度関数は

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|^2}{|\phi(e^{i\lambda})|^2}, \qquad \begin{aligned} \theta(e^{i\lambda}) &= 1 - \theta e^{-i\lambda} \\ \phi(e^{i\lambda}) &= 1 - \phi e^{-i\lambda} \end{aligned}$$

である。

従って、μ の最尤推定量 $\hat{\mu} = (\hat{\alpha}, \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}^2)'$ は、

$$\frac{\partial \mathrm{L}(\mu)}{\partial \mu} = 0$$

の根として求められる。ところで、上記尤度方程式は、μ に関する複雑な非線型方程式となるから、その根を求めるためには例えば Newton-Raphson 法に代表される様な逐次近似解法を用いなければならない。逐次近似解法並びに推定量の $T \to \infty$ の場合の漸近理論についてはこれまでにも考察したことがあるのでここでは再述することはさけることにしたい[2)]。

3．最尤推定量の確率展開

本節では、まず(1)式のモデルについて最尤推定量 $\hat{\mu}$ に関して $\sqrt{T}\,(\hat{\mu} - \mu)$ の $O_p(\frac{1}{\sqrt{T}})$ までの確率展開を求めることにする。ただし、必要となる計算は煩雑を極めるため、ここでは得られた主要な結果を中心に述べることにしたい。次節で述べる様に、確率展開に現われる係数は最尤推定量のバイアスを評価する際に重要な役割を果たすものである。

まず、$w = (w_1, w_2, \cdots, w_9)'$ を以下の諸要素から成る確率ベクトルとしよう。

(4)
$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \mathrm{L}(\mu)}{\partial \alpha} = l_1 - E(l_1)$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \mathrm{L}(\mu)}{\partial \phi} = l_2 - E(l_2) + q_2 - E(q_2)$$

2) 例えば拙著〔4〕を見られたい。

$$w_3=\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial \mathrm{L}(\mu)}{\partial\theta}=l_3-E(l_3)+q_3-E(q_3)$$

$$w_4=\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial \mathrm{L}(\mu)}{\partial\sigma^2}=l_4-E(l_4)+q_4-E(q_4)$$

$$w_5=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\alpha\partial\phi}-E\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\alpha\partial\phi}\right)\right)=l_5-E(l_5)$$

$$w_6=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\alpha\partial\theta}-E\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\alpha\partial\theta}\right)\right)=l_6-E(l_6)$$

$$w_7=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\phi\partial\phi}-E\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\phi\partial\phi}\right)\right)$$

$$=l_7-E(l_7)+q_7-E(q_7)$$

$$w_8=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\phi\partial\theta}-E\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\phi\partial\theta}\right)\right)$$

$$=l_8-E(l_8)+q_8-E(q_8)$$

$$w_9=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\theta\partial\theta}-E\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\theta\partial\theta}\right)\right)$$

$$=l_9-E(l_9)+q_9-E(q_9)$$

上式で、l, q はそれぞれ y に関する1次形式並びに2次形式を示し、$l_1\sim l_9$, $q_2\sim q_4$, $q_7\sim q_9$ は具体的にそれぞれ次式で与えられる。

(5) $$l_1=\frac{1}{\sqrt{T}\sigma^2}x'\Sigma^{-1}y=\bar{l}_1'y$$

$$l_2=\frac{-\alpha}{\sqrt{T}\sigma^2}x'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}y=\bar{l}_2'y$$

$$l_3=\frac{-\alpha}{\sqrt{T}\sigma^2}x'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1}y=\bar{l}_3'y$$

$$l_4=\frac{-\alpha}{\sqrt{T}\sigma^4}x'\Sigma^{-1}y=\bar{l}_4'y$$

$$l_5=\frac{-1}{\sqrt{T}\sigma^2}x'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}y=\bar{l}_5'y$$

$$l_6=\frac{-1}{\sqrt{T}\sigma^2}x'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1}y=\bar{l}_6'y$$

$$l_7=\frac{\alpha}{\sqrt{T}\sigma^2}x'(2\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}_{\phi\phi}\Sigma^{-1})y=\bar{l}_7'y$$

$$l_8=\frac{\alpha}{\sqrt{T}\sigma^2}x'(\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}+\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1}$$

$$-\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}_{\phi\theta}\Sigma^{-1})y=\bar{l}_8'y$$

$$l_9=\frac{\alpha}{\sqrt{T}\sigma^2}x'(2\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}_{\theta\theta}\Sigma^{-1})y=\bar{l}_9'y$$

$$q_2=\frac{1}{2\sqrt{T}\sigma^2}y'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}y=y'\bar{q}_2y$$

$$q_3=\frac{1}{2\sqrt{T}\sigma^2}y'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1}y=y'\bar{q}_3y$$

$$q_4=\frac{1}{2\sqrt{T}\sigma^4}y'\Sigma^{-1}y=y'\bar{q}_4y$$

$$q_7=\frac{1}{\sqrt{T}\sigma^2}y'(\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}_{\phi\phi}\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1})y=y'\bar{q}_7y$$

$$q_8=\frac{1}{2\sqrt{T}\sigma^2}y'(\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}_{\phi\theta}\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}$$

$$-\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1})y=y'\bar{q}_8y$$

$$q_9=\frac{1}{\sqrt{T}\sigma^2}y'(\Sigma^{-1}\ddot{\Sigma}_{\theta\theta}\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1})y=y'\bar{q}_9y$$

上式最右辺の $\bar{l}$, $\bar{q}$ は、1次形式、2次形式の係数部分を示し、また一般に $\Sigma(x,y)$ について、

$$\dot{\Sigma}_x=\frac{\partial}{\partial x}\Sigma,\quad \ddot{\Sigma}_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Sigma$$

である。

そこで、$\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu)$ を w の関数として $O_p(\frac{1}{\sqrt{T}})$ まで確率展開することを考えよう。そのために、$z_{\cdot}=\frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{L}(\mu)_{\cdot}$, $Z_{\cdot\cdot}=\frac{1}{\sqrt{T}}(\mathrm{L}(\mu)_{\cdot\cdot}-E(\mathrm{L}(\mu)_{\cdot\cdot}))$, $I_{\cdot\cdot}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E(\mathrm{L}(\mu)_{\cdot\cdot})$, $K_{\cdot\cdot\cdot}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E(\mathrm{L}(\mu))_{\cdot\cdot\cdot})$ を求めれば、(6)〜(12)式を得る。ただし、$\mathrm{L}(\mu)_{\cdot\cdot}$, $\mathrm{L}(\mu)_{\cdot\cdot\cdot}$ はそれぞれ次式を意味するものとする。

$$\mathrm{L}(\mu)_{\cdot\cdot}=\frac{\partial^2\mathrm{L}(\mu)}{\partial\mu\partial\mu'}$$

$$\mathrm{L}(\mu)_{\cdots} = \frac{\partial^3 \mathrm{L}(\mu)}{\partial\mu_a \partial\mu_b \partial\mu_c}$$ を第 (a, b, c) 要素とするテンソル

(6) $z_{\cdot} = (w_1, w_2, w_3, w_4)'$

(7)
$$Z_{\cdot\cdot} = \begin{bmatrix} 0, & w_5, & w_6, & -\dfrac{w_1}{\sigma^2} \\ & w_7, & w_8, & -\dfrac{w_2}{\sigma^2} \\ & & w_9, & -\dfrac{w_3}{\sigma^2} \\ & & & -\dfrac{2w_4}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

(8)
$$I_{\cdot\cdot} = \begin{bmatrix} -a, & 0, & 0, & 0 \\ & \dfrac{-1}{1-\phi^2}, & \dfrac{1}{1-\phi\theta}, & 0 \\ & & \dfrac{-1}{1-\theta^2}, & 0 \\ & & & -\dfrac{1}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$$

(9)
$$K_{1\cdot\cdot} = \begin{bmatrix} 0, & b, & c, & \dfrac{a}{\sigma^2} \\ & 0, & 0, & 0 \\ & & 0, & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(10)\qquad K_{2\cdot\cdot}=\begin{bmatrix} b, & 0, & 0 & , & 0 \\ & 0, & \dfrac{-2\phi}{(1-\phi^2)(1-\phi\theta)}, & & \dfrac{1}{(1-\phi^2)\sigma^2} \\ & & \dfrac{2(\phi+\theta-2\phi\theta^2)}{(1-\theta^2)(1-\phi\theta)^2}, & & \dfrac{-1}{(1-\phi\theta)\sigma^2} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(11)\qquad K_{3\cdot\cdot}=\begin{bmatrix} c, & 0, & 0, & 0 \\ & \dfrac{-2\phi}{(1-\phi^2)(1-\phi\theta)}, & \dfrac{2(\phi+\theta-2\phi\theta^2)}{(1-\theta^2)(1-\phi\theta)^2}, & \dfrac{-1}{(1-\phi\theta)\sigma^2} \\ & & \dfrac{-6\theta}{(1-\theta^2)^2}, & \dfrac{-1}{(1-\theta^2)\sigma^2} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(12)\qquad K_{4\cdot\cdot}=\begin{bmatrix} \dfrac{a}{\sigma^2}, & 0, & 0, & 0 \\ & \dfrac{1}{(1-\phi^2)\sigma^2}, & \dfrac{-1}{(1-\phi\theta)\sigma^2}, & 0 \\ & & \dfrac{1}{(1-\theta^2)\sigma^2}, & 0 \\ & & & \dfrac{2}{\sigma^6} \end{bmatrix}$$

上式で、a, b, c はそれぞれ次式で与えられる。

$$a=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T\sigma^2}x'\Sigma^{-1}x$$

$$b=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T\sigma^2}x'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\phi\Sigma^{-1}x$$

$$c=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T\sigma^2}x'\Sigma^{-1}\dot{\Sigma}_\theta\Sigma^{-1}x$$

そうすれば、$-I_{..}^{-1}z_{.}+\dfrac{1}{2\sqrt{T}}I_{..}^{-1}(2Z_{..}I_{..}^{-1}z_{.}-K_{...}\circ(I_{..}^{-1}z_{.})\circ(I_{..}^{-1}z_{.}))$ をもとにして、$\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu)$ を次式の如く $O_p(\dfrac{1}{\sqrt{T}})$ まで確率展開することができる。

$$(13)\qquad \sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu)=\mu_{\cdot}^{\cdot}\circ w+\frac{1}{2\sqrt{T}}\mu_{\cdot}^{\cdot\cdot}\circ w\circ w+o_p(\frac{1}{\sqrt{T}})$$

ただし、$\mu_{\cdot}^{\cdot}$, $\mu_{\cdot}^{\cdot\cdot}$ は次式を意味し、以下その各要素を整理して(14)～(18)式の如く表わすことにする[3]。

$$\mu_{\cdot}^{\cdot}=\left(\frac{\partial\sqrt{T}(\hat{\mu}_a-\mu_a)}{\partial w_j}\bigg|_{w=0}\right)$$

$$\mu_{\cdot}^{\cdot\cdot}=\sqrt{T}\left(\frac{\partial^2\sqrt{T}(\hat{\mu}_a-\mu_a)}{\partial w_j\partial w_k}\bigg|_{w=0}\right)$$ を第 $(a,\ j,\ k)$ 要素とするテンソル

$$(14)\qquad \mu_{\cdot}^{\cdot}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a}, & 0 & , & 0 & ,0,0,0,0,0,0 \\ 0, & \frac{(1-\phi^2)(1-\phi\theta)^2}{(\phi-\theta)^2} & , & \frac{(1-\phi^2)(1-\theta^2)(1-\phi\theta)}{(\phi-\theta)^2} & ,0,0,0,0,0,0 \\ 0, & \frac{(1-\phi^2)(1-\theta^2)(1-\phi\theta)}{(\phi-\theta)^2} & , & \frac{(1-\theta^2)(1-\phi\theta)}{(\phi-\theta)^2} & ,0,0,0,0,0,0 \\ 0, & 0 & , & 0 & ,2\sigma^4,0,0,0,0,0 \end{bmatrix}$$

$$(15)\qquad \mu_{1}^{\cdot\cdot}=\begin{bmatrix} 0, & \mu_1^{12}, & \mu_1^{13}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ & 0, & 0, & 0, & \mu_1^{25}, & \mu_1^{26}, & 0, & 0, & 0 \\ & & 0, & 0, & \mu_1^{35}, & \mu_1^{36}, & 0, & 0, & 0 \\ & & & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ & & & & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ & & & & & 0, & 0, & 0, & 0 \\ & & & & & & 0, & 0, & 0 \\ & & & & & & & 0, & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

3) $\mu_{\cdot}^{\cdot\cdot}$ の要素は上述の関係式より定められるが、煩雑となるため、ここでは記述を省略している。

$$(16)\qquad \mu_2^{\cdot\cdot} = \begin{bmatrix} \mu_2^{11} & 0 & 0 & 0 & \mu_2^{15} & \mu_2^{16} & 0 & 0 & 0 \\ & \mu_2^{22} & \mu_2^{23} & \mu_2^{24} & 0 & 0 & \mu_2^{27} & \mu_2^{28} & \mu_2^{29} \\ & & \mu_2^{33} & \mu_2^{34} & 0 & 0 & \mu_2^{37} & \mu_2^{38} & \mu_2^{39} \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(17)\qquad \mu_3^{\cdot\cdot} = \begin{bmatrix} \mu_3^{11} & 0 & 0 & 0 & \mu_3^{15} & \mu_3^{16} & 0 & 0 & 0 \\ & \mu_3^{22} & \mu_3^{23} & \mu_3^{24} & 0 & 0 & \mu_3^{27} & \mu_3^{28} & \mu_3^{29} \\ & & \mu_3^{33} & \mu_3^{34} & 0 & 0 & \mu_3^{37} & \mu_3^{38} & \mu_3^{39} \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(18)\qquad \mu_4^{\cdot\cdot} = \begin{bmatrix} \mu_4^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mu_4^{22} & \mu_4^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \mu_4^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

4．最尤推定量のバイアスの導出

さて、次に最尤推定量 $\hat{\mu}$ の各要素のバイアスを $O(\frac{1}{T})$ まで求めることを考えよう。

そのために、$s=(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_9)'$ として、w のキュムラント母関数 $\psi(s)$ を求めれば次式を得る。

(19) $$\psi(s) = -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1}{\sigma^2}\Sigma^{-1} - 2(s_2\bar{q}_2 + s_3\bar{q}_3 + \bar{s}_4 q_4 + s_7\bar{q}_7 + s_8\bar{q}_8 + s_9\bar{q}_9)\right| + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{9} s_i\bar{l}_i + \frac{\alpha}{\sigma^2}\Sigma^{-1}x\right)'\left(\frac{1}{\sigma^2}\Sigma^{-1} - 2(s_2\bar{q}_2 + s_3\bar{q}_3 + s_4\bar{q}_4 + s_7\bar{q}_7 + s_8\bar{q}_8 + s_9\bar{q}_9)\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{9} s_i\bar{l}_i + \frac{\alpha}{\sigma^2}\Sigma^{-1}x\right) + r$$

ただし、rは、$r = -\left(\sum_{i=1}^{9} s_i E(l_i) + s_2 E(q_2) + s_3 E(q_3) + s_4 E(q_4) + s_7 E(q_7) + s_8 E(q_8) + s_9 E(q_9)\right)$ を示すが、原点における2次のキュムラントψ_{ij}の計算には無関係であるからこれを最初から除外しておいてもよい。

そうすれば、$\hat{\mu}$ のバイアスを次式により $O(\frac{1}{T})$ まで求めることができることがわかる。ただし、バイアスはいづれも $\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu)$ の分布関数の $O_p(\frac{1}{\sqrt{T}})$ までの Edgeworth 展開にもとづくものである。

(20) $$E(\hat{\alpha}-\alpha) = \frac{1}{T}\left(\psi^{12}\mu_1^{12} + \psi^{13}\mu_1^{13} + \psi^{25}\mu_1^{25} + \psi^{26}\mu_1^{26} + \psi^{35}\mu_1^{35} + \psi^{36}\mu_1^{36}\right)$$

(21) $$E(\hat{\phi}-\phi) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}(\psi^{11}\mu_2^{11} + \psi^{22}\mu_2^{22} + \psi^{33}\mu_2^{33}) + \psi^{15}\mu_2^{15} + \psi^{16}\mu_2^{16} + \psi^{23}\mu_2^{23} + \psi^{24}\mu_2^{24} + \psi^{27}\mu_2^{27} + \psi^{28}\mu_2^{28} + \psi^{29}\mu_2^{29} + \psi^{34}\mu_2^{34} + \psi^{37}\mu_2^{37} + \psi^{38}\mu_2^{38} + \psi^{39}\mu_2^{39}\right)$$

(22) $$E(\hat{\theta}-\theta) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}(\psi^{11}\mu_3^{11} + \psi^{22}\mu_3^{22} + \psi^{33}\mu_3^{33}) + \psi^{15}\mu_3^{15} + \psi^{16}\mu_3^{16} + \psi^{23}\mu_3^{23} + \psi^{24}\mu_3^{24} + \psi^{27}\mu_3^{27} + \psi^{28}\mu_3^{28} + \psi^{29}\mu_3^{29} + \psi^{34}\mu_3^{34} + \psi^{37}\mu_3^{37} + \psi^{38}\mu_3^{38} + \psi^{39}\mu_3^{39}\right)$$

(23) $$E(\hat{\sigma}^2-\sigma^2) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}(\psi^{11}\mu_4^{11} + \psi^{22}\mu_4^{22} + \psi^{33}\mu_4^{33}) + \psi^{23}\mu_4^{23}\right)$$

上式で必要となるキュムラントのうち、非ゼロとなるものを求めれば次式の如くなる。なお、バイアスの $O(\frac{1}{T})$ までの展開を考える限り、必要となる2次

のキュムラントはいづれもその最高次数の値を求めればよいことに注意したい。

(24)
$$\psi^{11}=a,\qquad \psi^{15}=-b$$
$$\psi^{16}=-c,\qquad \psi^{22}=\frac{1}{1-\phi^2}$$
$$\psi^{23}=\frac{1}{1-\phi^2}\qquad \psi^{27}=\frac{-2\phi}{(1-\phi^2)^2}$$
$$\psi^{28}\frac{\theta+2\phi-3\phi^2\theta}{(1-\phi^2)(1-\phi\theta)^2},\qquad \psi^{29}=\frac{-2(\phi+\theta-2\phi\theta^2)}{(1-\theta^2)(1-\phi\theta)^2}$$
$$\psi^{33}=\frac{1}{1-\theta^2},\qquad \psi^{37}=\frac{2\phi}{(1-\phi^2)(1-\phi\theta)}$$
$$\psi^{38}=\frac{-\phi-2\theta+3\phi\theta^2}{(1-\theta^2)(1-\phi\theta)^2},\qquad \psi^{39}=\frac{4\theta}{(1-\theta^2)^2}$$

以上より、最終的にバイアスをμ, ψを用いて(20)～(23)式により評価できることが明らかになるのである。

5．バイアスの諸性質

前節の議論をもとに、$\hat{\mu}$のバイアスを具体的に$O(\frac{1}{T})$まで求め、その諸性質について考察しよう。

まず、$\hat{\alpha}$, $\hat{\sigma}^2$については、(20), (23)式よりそのバイアスが次式の如くなる。

(25) $$E(\hat{\alpha}-\alpha)=0$$

(26) $$E(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)=\frac{-3\sigma^2}{T}$$

すなわち、$\hat{\alpha}$は$O(\frac{1}{T})$まで不偏であるが、$\hat{\sigma}^2$は下方に$\frac{3\sigma^2}{T}$だけ偏っていることがわかるのである。ところで、これらの性質はモデルの型にどの程度まで依存するのであろうか。まず上述した$\hat{\alpha}$のバイアスに関する性質は、より一般に誤差項が定常でありさえすれば、ラグ付き従属変数を含まない回帰モデルに対しては常に成立することを示すことができる。これに対して、$\hat{\sigma}^2$のバイアスはモデルの特定化に依存し、例えば誤差項v_tがARMA(1,1)過程にかわ

って、AR(1)過程ないしMA(1)過程に従う場合には、$E(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)=\dfrac{-2\sigma^2}{T}$となることがわかる。この様に、$\hat{\sigma}^2$のバイアスはモデルに含まれる未知母数の個数に依存して増減することがわかるのである[4]。

一方、$\hat{\phi}$及び$\hat{\theta}$のバイアスは、(21)、(22)式で与えられるが、独立変数x_tの変動の影響が係数a、b、cを通してバイアスの展開式に表われるため、x_tをさらに特定化しない限りバイアスをこれ以上簡単な形に整理して表現することは困難である。そこで以下ではその一例として、$x_t\equiv 1$とした場合について、バイアスを数値的に評価した結果について述べよう。なお、この場合には(1)式のモデルは次式で表わされるARMA (1,1) モデルに他ならない。

(27) $$(y_t-\alpha)-\phi(y_{t-1}-\alpha)=u_t-\theta u_{t-1}$$

さて、例えば$\hat{\phi}$について、そのバイアスを数値的に評価した結果から次の様な諸性質を得た。

なお、$\hat{\theta}$のバイアスについてもほぼ同様の特徴を見出すことができた。

(i) $\hat{\phi}$のバイアスは、α, σ^2の値には依存せず、ϕ及びθの値にのみ依存して定まる[5]。この性質は、$T\to\infty$において$\hat{\phi}$が$\hat{\alpha}$, $\hat{\sigma}^2$とは無相関であるが、$\hat{\theta}$とは相関を持つことにも呼応している。

(ii) θの大部分の領域に対して、$\hat{\phi}$のバイアスは、$\phi<0$のとき正、$\phi>0$のとき負となり、その値は対称的に現われる。

(iii) ϕとθの値が接近する程、$\hat{\phi}$のバイアスは著しく増大する傾向がある。従って、標本数が少ない場合にはこのバイアスが相当大きなものとなることを覚悟せねばならない。特に$\phi=\theta$のときARMA(1,1) モデルが識別不能となることに注意すれば、上述の現象の原因が理解できよう。

(iv) 逆に、ϕとθの値が離隔する程、$\hat{\phi}$のバイアスは減少する。

なお、以上の諸性質はバイアスの$O(\frac{1}{T})$までの評価にもとづくものであり、その性質をより微細に検討する必要のある場合には例えばさらに$O(\frac{1}{T^2})$の項まで求める必要のあることを補足しておきたい。また、特に$\hat{\phi}$、$\hat{\theta}$のバイ

4) 例えば拙稿〔5〕を参照されたい。

5) この性質は数値計算によらず理論的に導かれたものである。

アスに関しては今後さらに上記以外の場合についても検討する必要のあることは言うまでもないが、バイアスの基本的な性質を探る上で上記の諸性質により一つの見通しを得ることができたと言ってよいであろう。

6．バイアスの評価式の導出

本節では最後に、本稿のこれまでの諸結果を導くにあたって有用な役割を果たす、正規分布に従う統計量のバイアスの評価式について述べることにしたい。

まず、$p=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m)'$ 及び $e(p)=(e_1(p),\ e_2(p),\ \cdots,\ e_n(p))'$ を、$E(p)=0$，$e(0)=0$ を満たすそれぞれ m 次、n 次の確率ベクトルとする。特に、$\sqrt{T}e(p)$ は $T\to\infty$ のとき極限同時正規分布を持つものとし、$\bar{p}=\sqrt{T}p$ の極限共分散行列は非特異であり、また必要なすべてのキュムラントは有界であるものとする。

さて、$\sqrt{T}e(p)$ が $O_p(\frac{1}{T})$ まで次式の如く確率展開できるものとしよう。

(28)
$$\sqrt{T}e(p)=e^{\cdot}_{\cdot}\circ\bar{p}+\frac{1}{2\sqrt{T}}e^{\cdot\cdot}_{\cdot}\circ\bar{p}\circ\bar{p}+\frac{1}{6T}e^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot}\circ\bar{p}\circ\bar{p}\circ\bar{p}+o_p(\frac{1}{T})$$

ただし、$e^{\cdot}_{\cdot}$, $e^{\cdot\cdot}_{\cdot}$, $e^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot}$ はそれぞれ次式を意味するものとする。

$$e^{\cdot}_{\cdot}=\left(\frac{\partial e_a(p)}{\partial p_j}\bigg|_{p=0}\right)$$

$$e^{\cdot\cdot}_{\cdot}=\frac{\partial^2 e_a(p)}{\partial p_j\partial p_k}\bigg|_{p=0}$$ を第 $(a,\ j,\ k)$ 要素とするテンソル

$$e^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot}=\frac{\partial^3 e_a(p)}{\partial p_j\partial p_k\partial p_l}\bigg|_{p=0}$$ を第 $(a,\ j,\ k,\ l)$ 要素とするテンソル

そうすれば、Sargan [3] によって得られたスカラー変量に関する Edgeworth 展開式をベクトル変量の場合に拡張することにより、$\sqrt{T}e(p)$ の同時分布 $f(x)$ を次式の如く $O(\frac{1}{T})$ まで Edgeworth 展開できることがわかる。

(29)
$$f(x)=\phi(x)+\frac{1}{2\sqrt{T}}H(a)\,\alpha_4(a)+H(a,b)\left\{\frac{1}{2\sqrt{T}}\alpha_5(a,b)+\frac{1}{2T}\alpha_7(a,b)\right.$$

$$+\frac{1}{8T}\alpha_4(a)\,\alpha_4(b)+\frac{1}{4T}\alpha_9(a,b)\Big\}$$

$$+H(a,b,c)\Big\{\frac{1}{6}\alpha_1(a,b,c)+\frac{1}{2\sqrt{T}}\alpha_3(a,b,c)\Big\}$$

$$+H(a,b,c,d)\Big\{\frac{1}{24}\alpha_2(a,b,c,d)+\frac{1}{2\sqrt{T}}\alpha_{10}(a,b,c,d)$$

$$+\frac{1}{12\sqrt{T}}\alpha_1(a,b)\,\alpha_4(c,d)+\frac{1}{6T}\alpha_6(a,b,c,d)$$

$$+\frac{1}{4T}\alpha_3(a,b)\,\alpha_4(c,d)+\frac{1}{2T}\alpha_8(a,b,c,d)\Big\}$$

$$+H(a,b,c,d,e,f)\Big\{\frac{1}{72}\alpha_1(a,b,c)\,\alpha_1(d,e,f)$$

$$+\frac{1}{12\sqrt{T}}\alpha_1(a,b,c)\,\alpha_3(d,e,f)$$

$$+\frac{1}{8T}\alpha_3(a,b,c)\,\alpha_3(d,e,f)\Big\}+o\Big(\frac{1}{T}\Big)$$

ここで、$\phi(x)$、$H(\cdot)$ は多変量正規密度関数並びにエルミート多項式を意味し、それぞれ次式で与えられる。

$$\phi(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\ )^n|\Omega|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}x'\Omega^{-1}x}$$

$$\Omega=(w(a,b))$$

$$w(a,b)=\psi^{ij}e_a^ie_b^j$$

$$H(a)=\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_a},\ \cdots,$$

$$H(a,b,c,d,e,f)=\frac{\partial^6\phi(x)}{\partial x_a\partial x_b\partial x_c\partial x_d\partial x_e\partial x_f}$$

また、係数 $\alpha_i(\cdot)$ は次式で定義される。

$$\alpha_1(a,b,c)=\psi^{ijk}e_a^ie_b^je_c^k$$

$$\alpha_2(a,b,c,d)=\psi^{ijkl}e_a^ie_b^je_c^ke_d^l$$

$$\alpha_3(a,b,c)=\gamma_a^ie_b^{ij}\gamma_c^j$$

$$\alpha_4(a)=\psi^{ij}e_a^{ij}$$

$$\alpha_5(a,b)=\psi^{ijk}e_a^{ij}e_b^k$$

$\alpha_6(a,b,c,d) = e_a^{ijk}\gamma_b^i\gamma_c^j\gamma_d^k$

$\alpha_7(a,b) = \psi^{ij}e_a^{ijk}\gamma_b^k$

$\alpha_8(a,b,c,d) = \psi^{jk}\gamma_a^i e_b^{ij} e_c^{kl}\gamma_d^l$

$\alpha_9(a,b) = \psi^{ij}\psi^{kl}e_a^{ij}e_b^l$

$\alpha_{10}(a,b,c,d) = \psi^{jkl}\gamma_a^i e_b^{ij} e_c^k e_d^l$

$\gamma_a^i = \psi^{ij}e_a^j$

ψ は p のキュムラントである。

さて、上式で $\sqrt{T}e(p)$ を特に $\sqrt{T}e(p)=\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu)$ とみなせば、$\hat{\mu}_a$ のバイアスを

$$E(\hat{\mu}_a-\mu_a) = \frac{1}{2T}\alpha_4(a) \tag{30}$$

により評価できることがわかる。すなわち、$\hat{\mu}_a$ の $O(\frac{1}{T})$ までのバイアスを求めるためには、w の2次のキュムラントと、$\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu)$ の2階の偏微分係数が必要となることがわかるのである。

7．おわりに

本稿では、誤差項が ARMA(1,1) 過程に従う回帰モデルについて、未知母数の最尤推定量の $O(\frac{1}{T})$ までのバイアスを求め、その諸性質について考察した。

誤差項が AR(1) 過程に従う場合に比べて必要となる計算はより複雑なものになるが、前節で明らかにした様に、同モデルの一つの大きな特徴として、自己回帰母数 ϕ と移動平均母数 θ が接近するにつれてこれらの最尤推定量のバイアスが著しく増大する点をあげることができよう。このことは、特に小標本時において、ϕ と θ を正確に推定することが如何に難しいかを物語っているとも言えるだろう。

なお、本稿では誤差項が ARMA(1,1) 過程に従っている場合を扱ったのであるが、今後さらに、誤差項がより一般的な ARMA(p,q) 過程に従う回帰モデルの小標本特性について考察することが考えられよう。幸い、経済時系列の

分析に必要となる次数 p、q は高々2前後である場合が多いことから、これらのケースについて推定量のバイアスや分布の Edgeworth 展開を求め、その性質を比較検討することがこの分野の研究に残された今後の課題であろう。

(筆者は関西学院大学商学部教授)

参考文献

〔1〕 Maekawa, K. (1984), "Edgeworth expansion for OLS estimator in an ARMAX model," Technical Report No. 122, Hiroshima University.

〔2〕 森棟公夫 (1985), 経済モデルの推定と検定, 共立出版株式会社.

〔3〕 Sargan, J. D. (1976), "Econometric estimators and Edgeworth expansions," Econometrica, 44, 421-462.

〔4〕 杉原左右一 (1984), 時系列の統計的研究, 東洋経済新報社.

〔5〕 杉原左右一 (1985), 「系列相関誤差のある回帰モデルの小標本理論—擬似最尤推定量の分布の漸近展開—」, 商学論究 32-4, 35-53.

〔6〕 Sugihara, S. (1985), "Asymptotic expansions associated with regression model with autoregressive errors," Kwansei Gakuin University Annual Studies, Vol. 34, Kwansel Gakuin University.